

- Laboratorio -

Alla scoperta della funzione quadratica: un esempio tratto dalla geometria

Andrea Ottonello

andreaottonello1996@gmail.com

Raffaella Rebora

raffaella.rebora@gmail.com

Anita Dondero

anitadondero1991@gmail.com

Chi siamo?

- Docenti di matematica nella scuola secondaria di secondo grado (I.I.S. Calvino Genova)
- Gruppo Diva al Dima: Pensiero Algebrico

I nostri obiettivi

- Avere la possibilità di **confrontarci sulle pratiche didattiche** e condividere esperienze supportati da esperti del DIMA
- **Sviluppare competenze nella progettazione di attività** per migliorare l'apprendimento della matematica nei nostri studenti



Pensiero Algebrico

Esigenza di costruire il pensiero algebrico.

«L'algebra come uno strumento per comprendere, esprimere e comunicare le generalizzazioni, per scoprire e mostrare la struttura, per stabilire connessioni e costruire dimostrazioni.»

(Arcavi 2010)



Il Laboratorio

1. Attività e Discussione in gruppo
2. La sperimentazione in classe
 - Scelta di un problema significativo
 - Uno strumento teorico: il TRU
 - Conclusioni
3. Spunti per una valutazione formativa



Attività'

Per ciascuna scheda (in totale saranno 3):

1 **Risoluzione** del quesito
in gruppo



2 **Analisi** di discussioni
e/o protocolli degli
studenti



3 **Discussione**





SCHEDA 1 – Risoluzione

QUESITO:

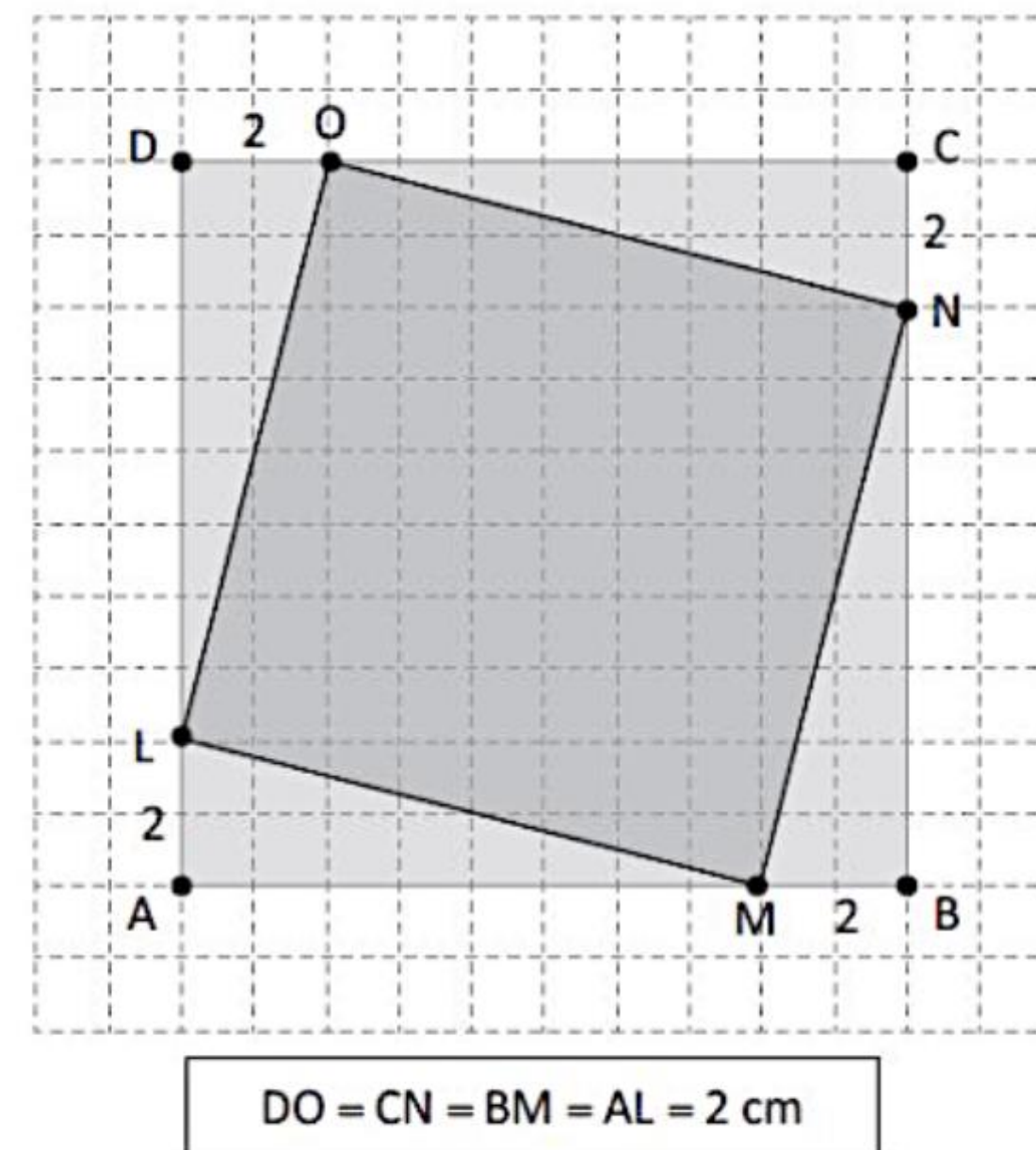
In un quadrato ABCD di lato 10 cm si costruisce un quadrilatero LMNO in modo tale che i segmenti DO, CN, BM e AL sono uguali fra loro e ciascuno di essi misura 2 cm.

*Che tipo di quadrilatero è LMNO secondo voi?
Come possiamo esserne sicuri?*

Risolvi il quesito ponendoti nei panni dello studente.

Quali strategie pensi adotterebbero i tuoi studenti?

Quali difficoltà potrebbero incontrare?



SCHEDA 1 – Analisi



Dalla discussione in classe:

**Che tipo di quadrilatero è LMNO
secondo voi?**



E' un quadrato perché:

- ha la stessa forma del quadrato.
- se ruoto la figura noto che visivamente sono uguali

**Come possiamo esserne
sicuri?**



Proviamo che ha tutti i lati uguali:

- Misuro con il righello tutti i lati
- Applico il teorema di Pitagora
- Criteri di congruenza dei triangoli

**Non è sufficiente la congruenza
dei lati...**



- Misuro gli angoli interni con un goniometro o con un foglio di carta
- Dimostro che gli angoli sono retti, usando i criteri di congruenza e gli angoli complementari
- Dimostro che le diagonali sono congruenti.



SCHEDA 1 – Discussione

QUESITO:

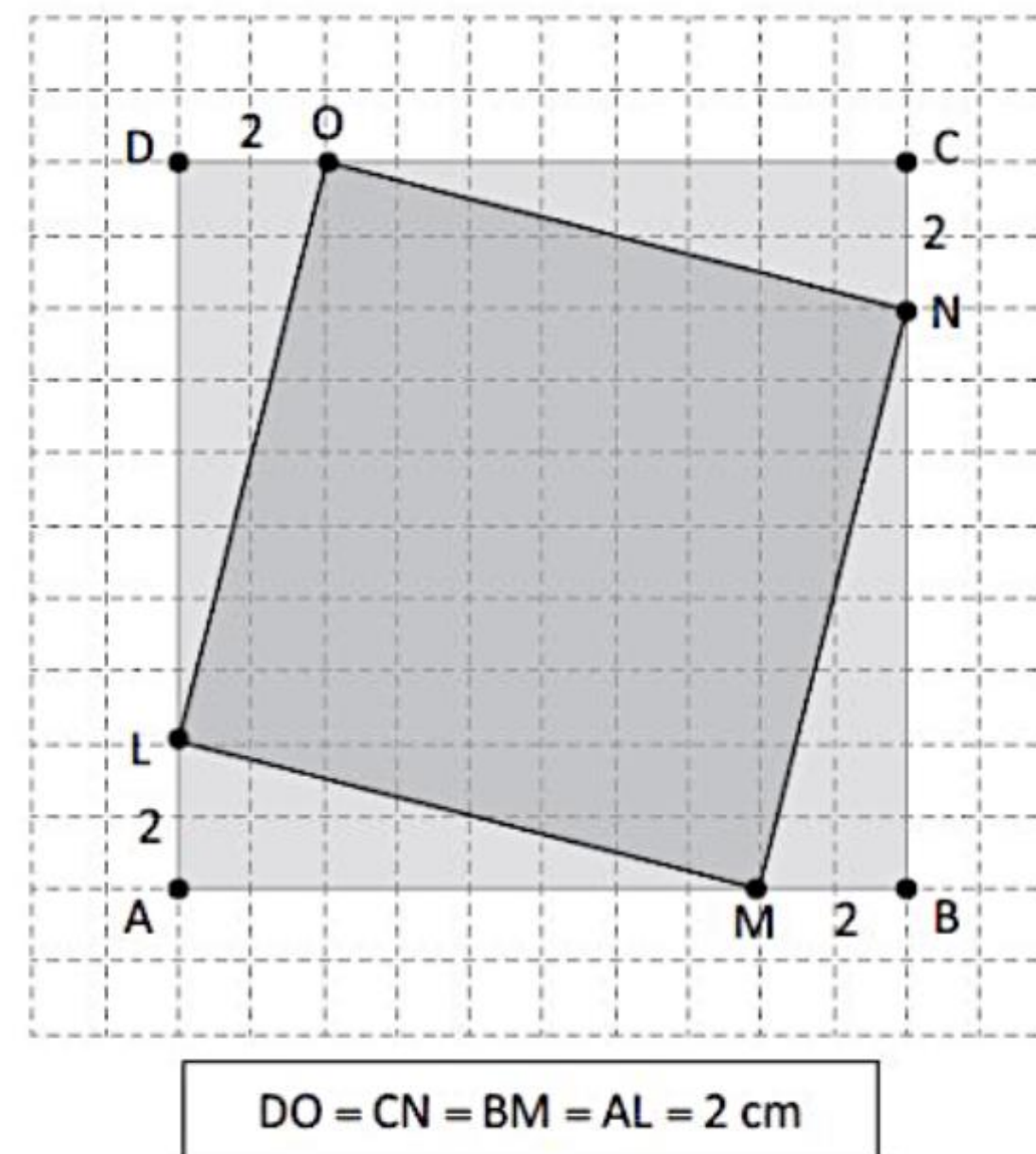
In un quadrato ABCD di lato 10 cm si costruisce un quadrilatero LMNO in modo tale che i segmenti DO, CN, BM e AL sono uguali fra loro e ciascuno di essi misura 2 cm.

*Che tipo di quadrilatero è LMNO secondo voi?
Come possiamo esserne sicuri?*

Risolvi il quesito ponendoti nei panni dello studente.

Quali strategie pensi adotterebbero i tuoi studenti?

Quali difficoltà potrebbero incontrare?





SCHEDA 2 – Risoluzione

QUESITO:

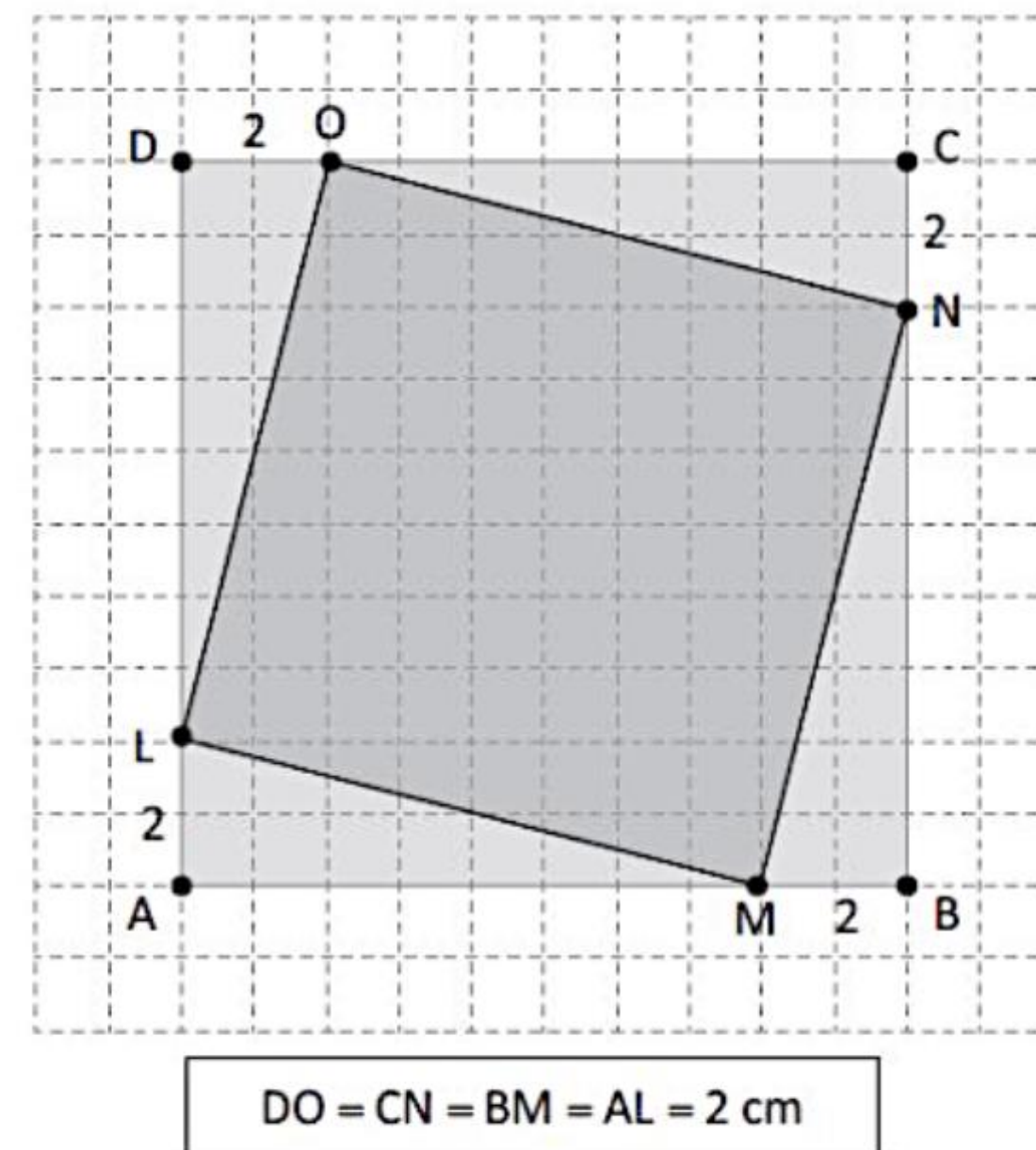
In un quadrato ABCD di lato 10 cm è inscritto un quadrato LMNO. I segmenti DO, CN, BM e AL sono uguali fra loro e ciascuno di essi misura 2 cm.

Quanto misura l'area del quadrato LMNO?

Risolvi il quesito ponendoti nei panni dello studente.

Quali strategie pensi adotterebbero i tuoi studenti?

Quali difficoltà potrebbero incontrare?



SCHEDA 2 – Analisi



QUESITO:

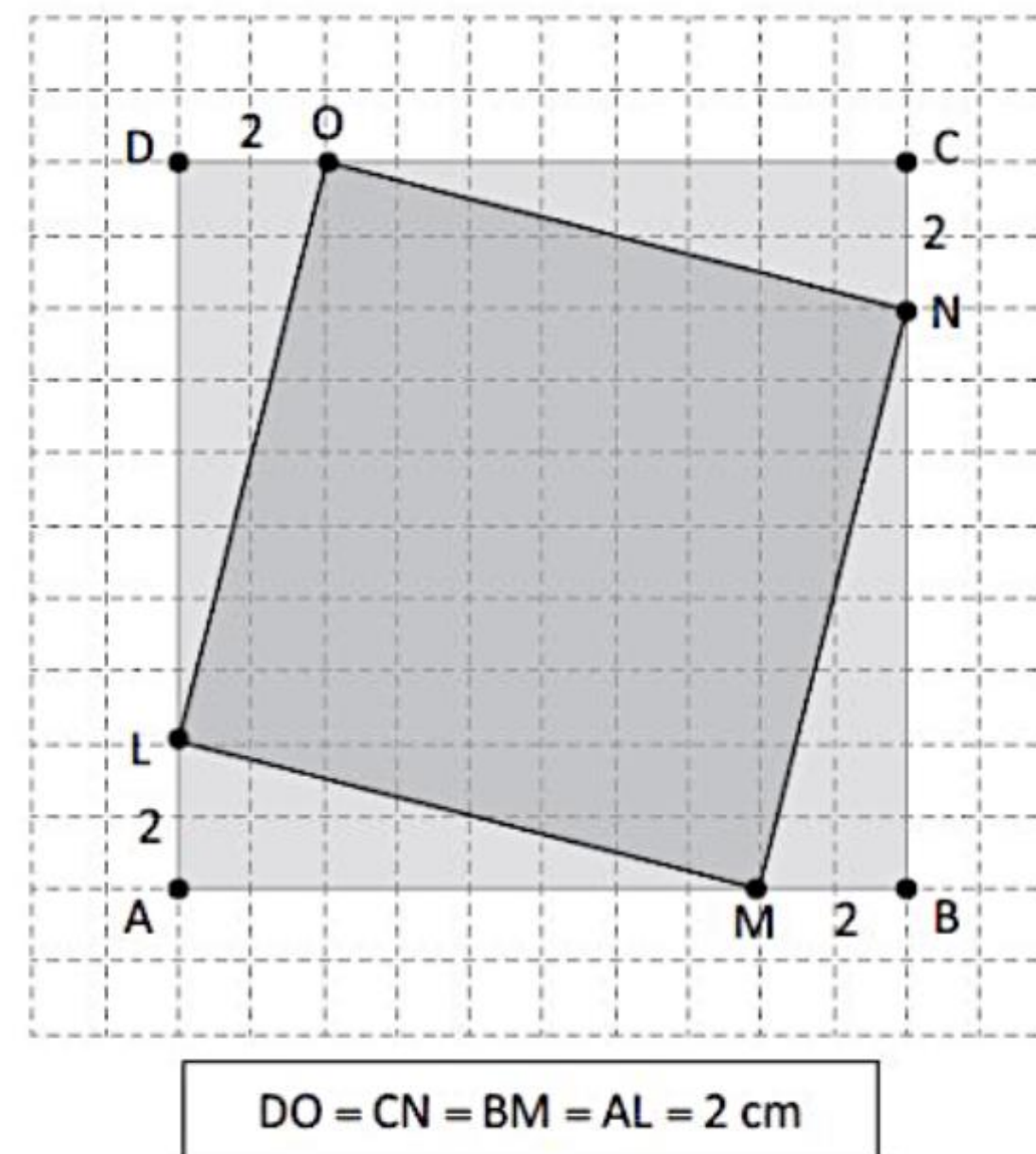
In un quadrato ABCD di lato 10 cm è inscritto un quadrato LMNO. I segmenti DO, CN, BM e AL sono uguali fra loro e ciascuno di essi misura 2 cm.

Quanto misura l'area del quadrato LMNO?

Risolvi il quesito ponendoti nei panni dello studente.

Quali strategie pensi adotterebbero i tuoi studenti?

Quali difficoltà potrebbero incontrare?





SCHEDA 2 – Discussione

QUESITO:

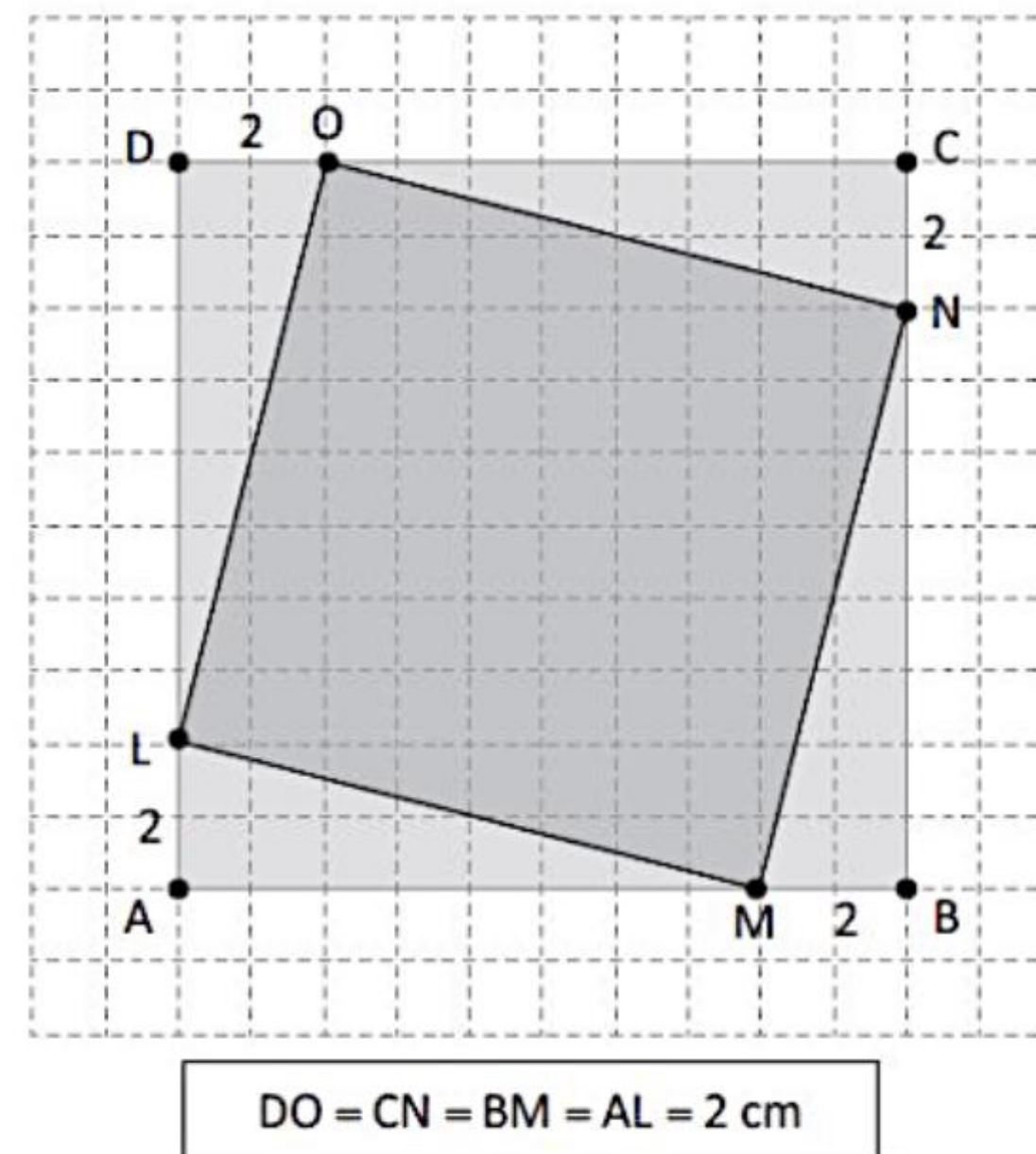
In un quadrato ABCD di lato 10 cm è inscritto un quadrato LMNO. I segmenti DO, CN, BM e AL sono uguali fra loro e ciascuno di essi misura 2 cm.

Quanto misura l'area del quadrato LMNO?

Risolvi il quesito ponendoti nei panni dello studente.

Quali strategie pensi adotterebbero i tuoi studenti?

Quali difficoltà potrebbero incontrare?





SCHEDA 3 – Risoluzione

QUESITO:

Immagina ora che i punti L, M, N e O si muovano lungo i lati del quadrato ABCD in modo tale che $DO = CN = BM = AL$.

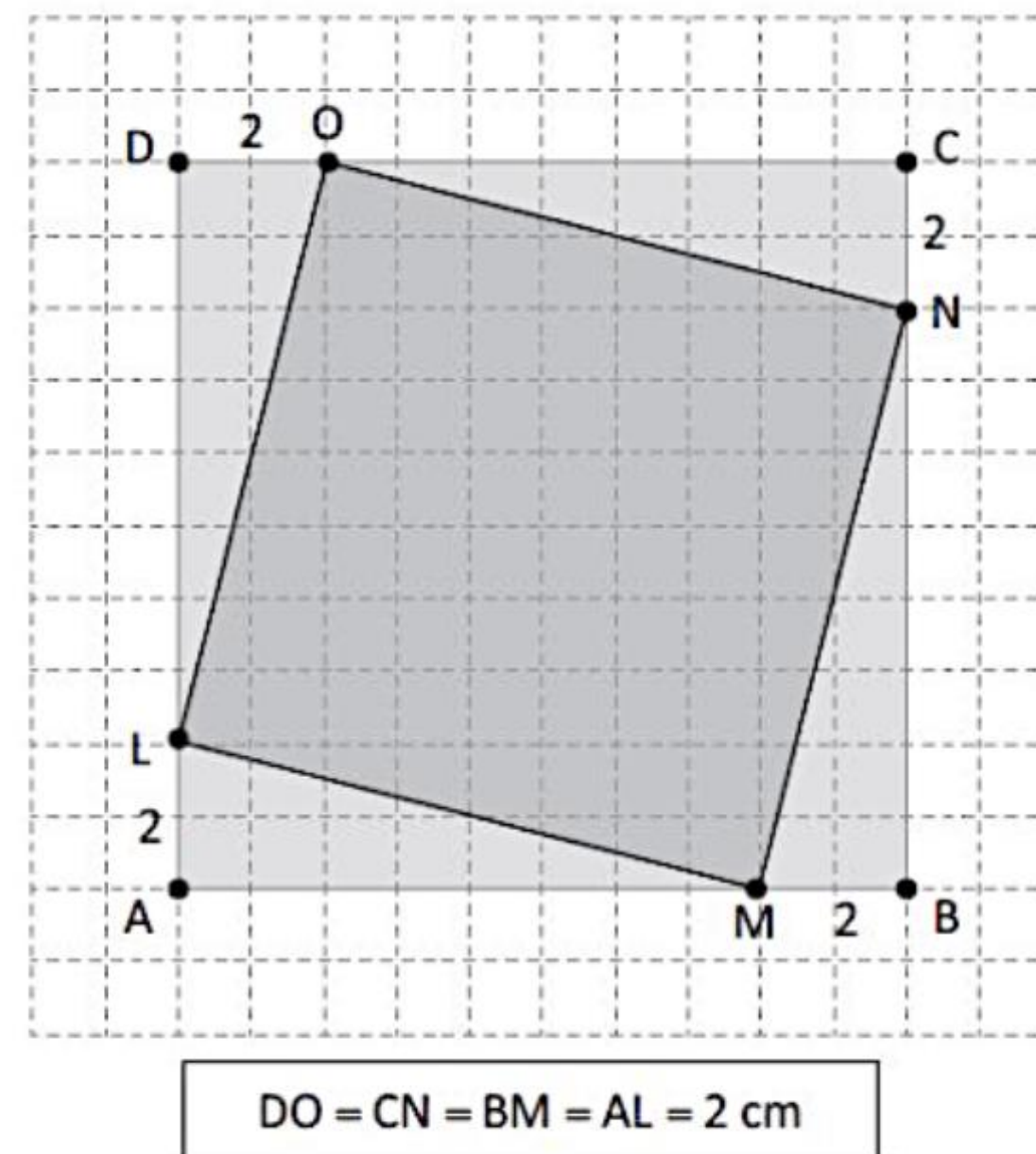
Rifletti ed esplora sulle seguenti domande:

- Cosa succede alla figura LMNO se spostiamo il punto O ad una distanza di 1 cm da D? E se lo spostiamo di 3 cm?
- Come varia l'area di LMNO a seconda della posizione del punto O?

Risolvi il quesito ponendoti nei panni dello studente.

Quali strategie pensi adotterebbero i tuoi studenti?

Quali difficoltà potrebbero incontrare?



SCHEDA 3 – Analisi



QUESITO:

Immagina ora che i punti L, M, N e O si muovano lungo i lati del quadrato ABCD in modo tale che $DO = CN = BM = AL$.

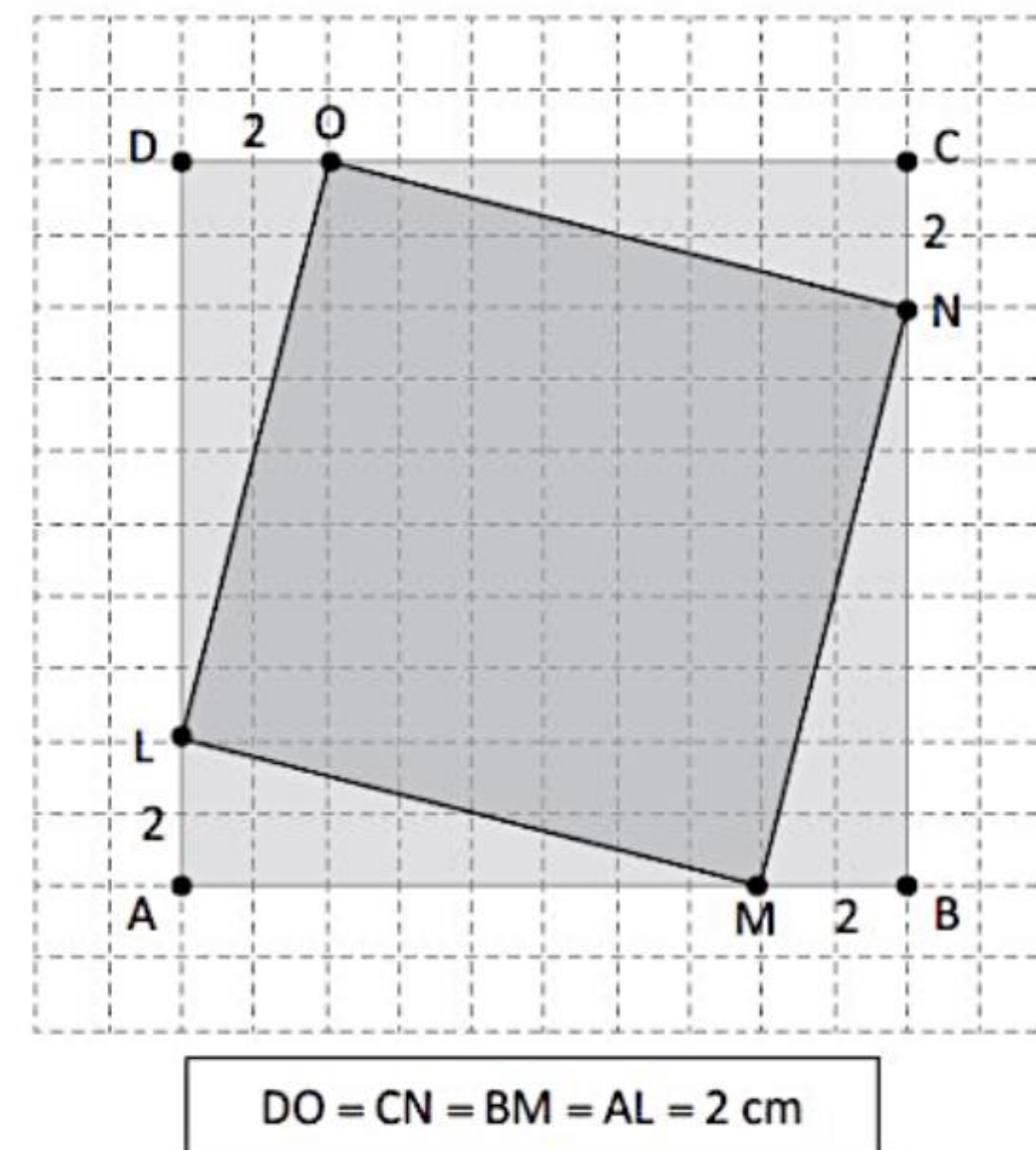
Rifletti ed esplora sulle seguenti domande:

- Cosa succede alla figura LMNO se spostiamo il punto O ad una distanza di 1 cm da D? E se lo spostiamo di 3 cm?
- Come varia l'area di LMNO a seconda della posizione del punto O?

Risolvi il quesito ponendoti nei panni dello studente.

Quali strategie pensi adotterebbero i tuoi studenti?

Quali difficoltà potrebbero incontrare?





SCHEDA 3 – Discussione

QUESITO:

Immagina ora che i punti L, M, N e O si muovano lungo i lati del quadrato ABCD in modo tale che $DO = CN = BM = AL$.

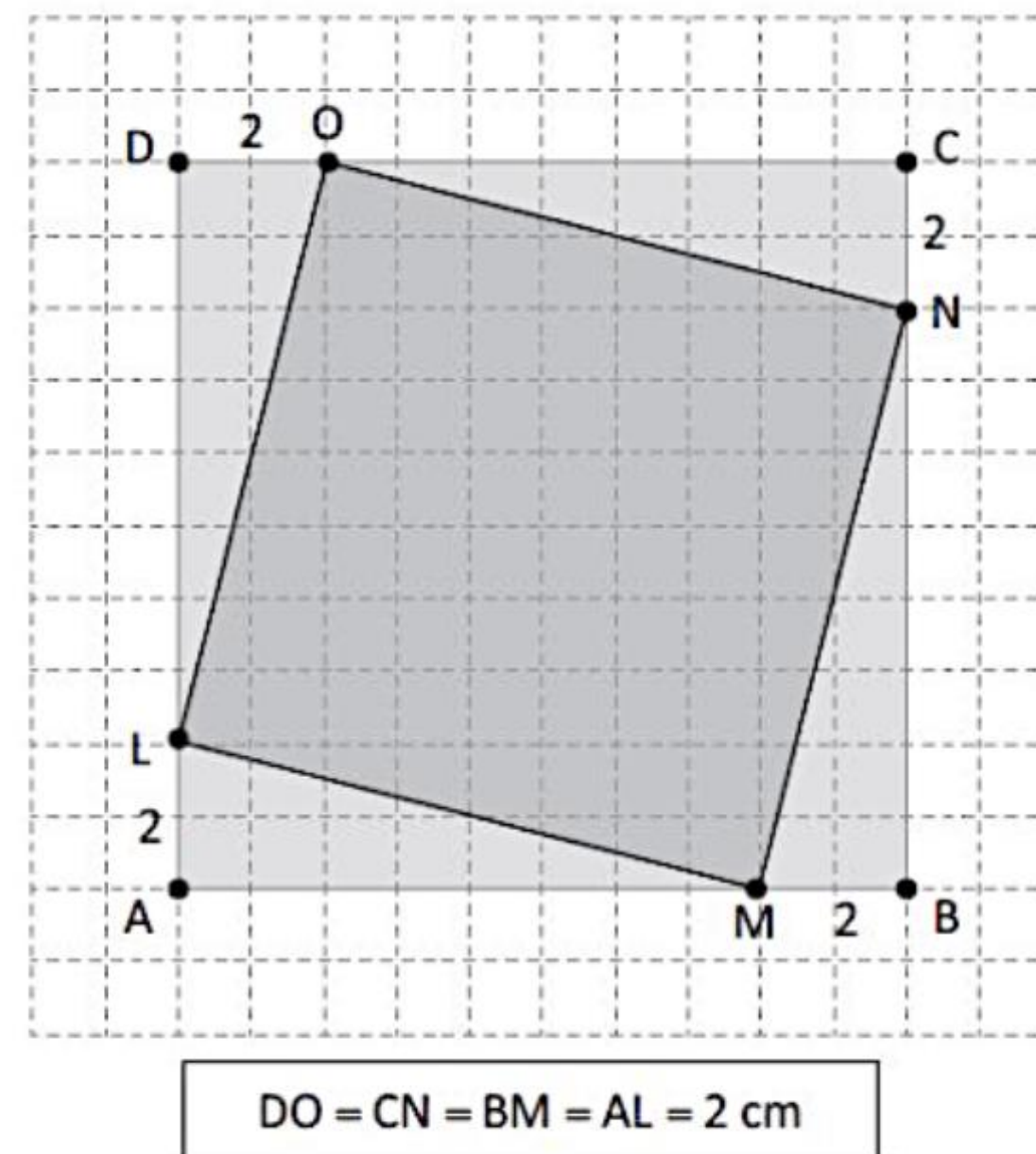
Rifletti ed esplora sulle seguenti domande:

- Cosa succede alla figura LMNO se spostiamo il punto O ad una distanza di 1 cm da D? E se lo spostiamo di 3 cm?
- Come varia l'area di LMNO a seconda della posizione del punto O?

Risolvi il quesito ponendoti nei panni dello studente.

Quali strategie pensi adotterebbero i tuoi studenti?

Quali difficoltà potrebbero incontrare?



Dalle Indicazioni Nazionali

Area Logico – Argomentativa



Sostenere le proprie tesi ed
analizzare criticamente le tesi altrui

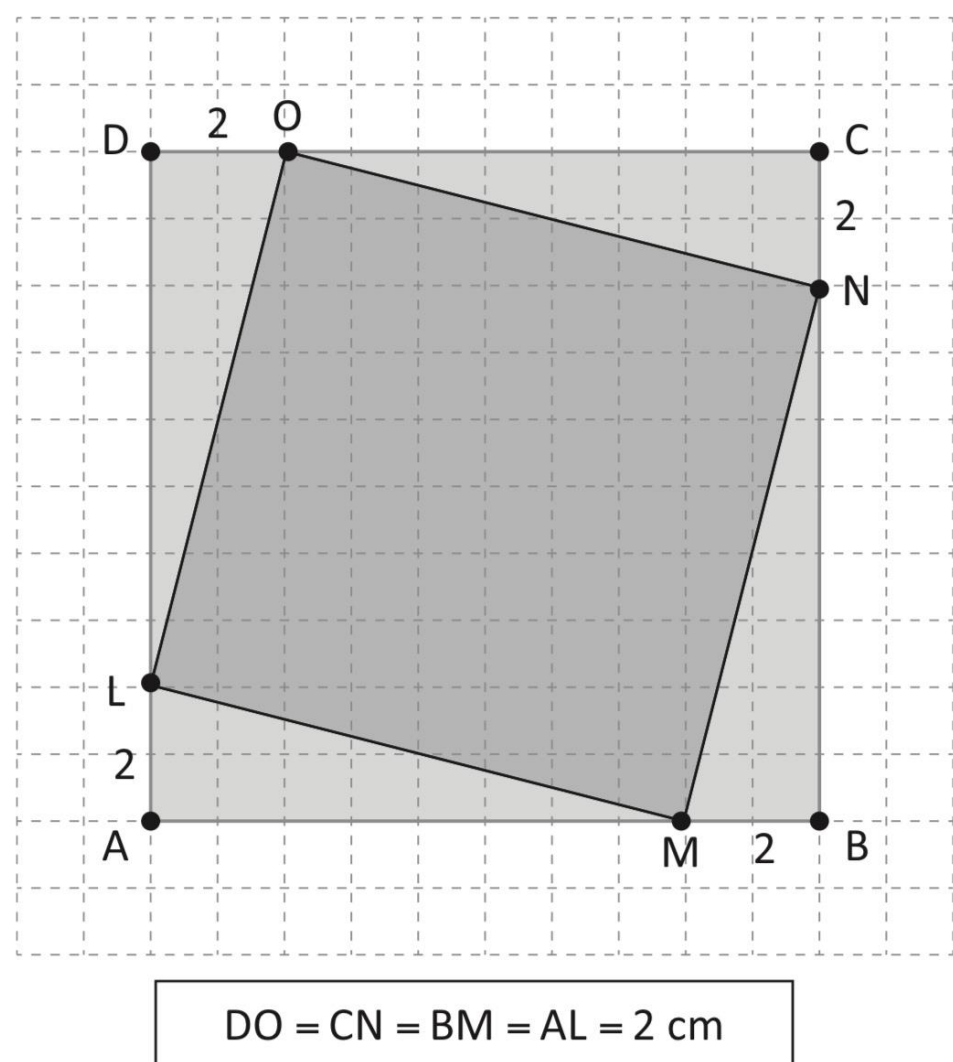
Area Scientifico – Matematica



Comprendere il linguaggio formale e
applicare procedure del pensiero
matematico.

Scelta di un problema significativo

- E14. In un quadrato ABCD di lato 10 cm è inscritto un quadrato LMNO. I segmenti DO, CN, BM e AL sono uguali fra loro e ciascuno di essi misura 2 cm.



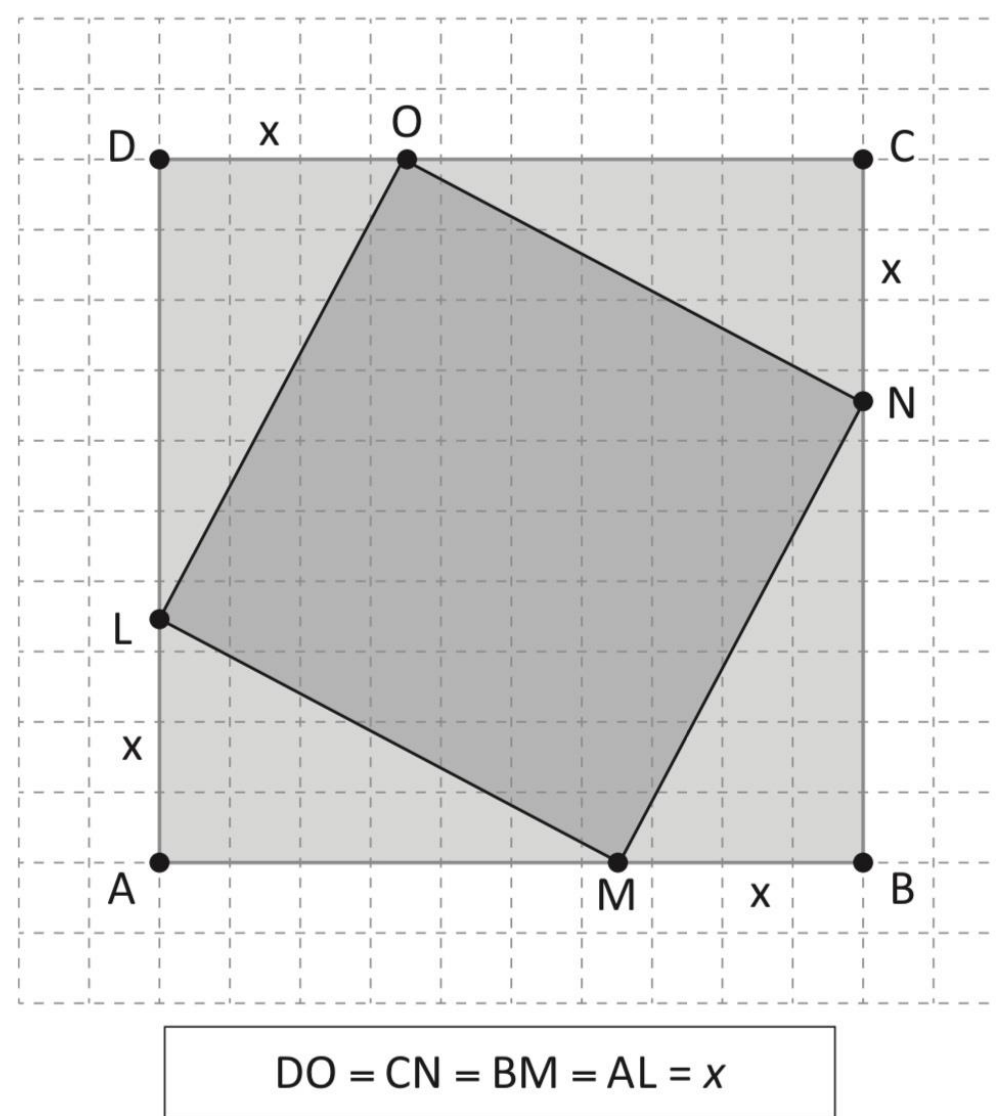
- a. Quanto misura l'area del quadrato LMNO?

Risposta: cm²

**Quesito Invalsi
Grado 8
2011-12**

Scelta di un problema significativo

Immagina ora che i punti L, M, N e O si muovano lungo i lati del quadrato ABCD in modo tale che $DO = CN = BM = AL = x$. Al variare di x varia anche l'area del quadrato LMNO.



b. Per quale tra questi valori di x l'area del quadrato LMNO diventa minima?

- A. ☐ 1 cm
- B. ☐ 3 cm
- C. ☐ 5 cm
- D. ☐ 8 cm

Quesito Invalsi
Grado 8
2011-12

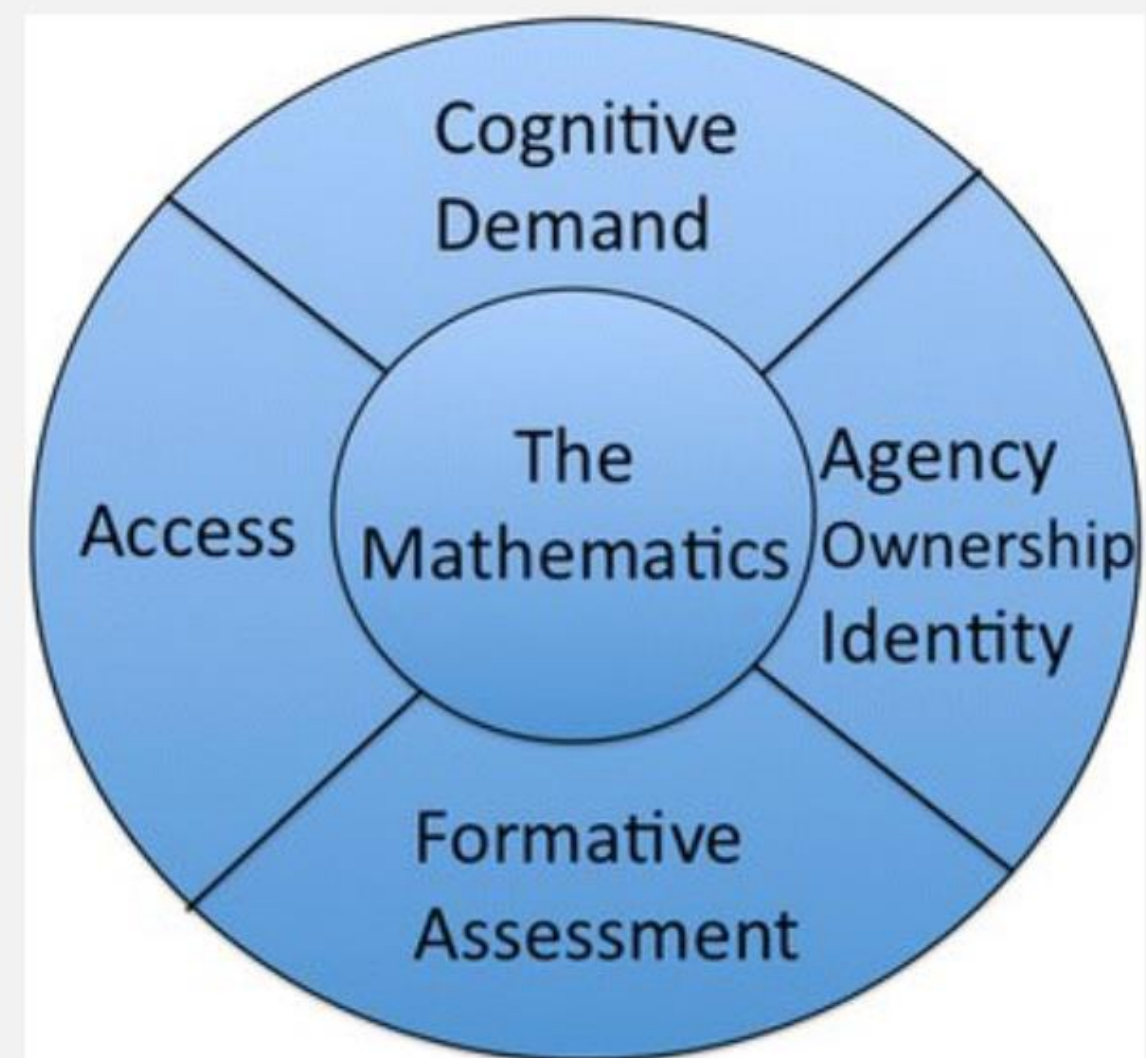
TRU – Teaching for Robust Understanding

Rielaborazione
del quesito



Strumento
teorico: il TRU

5 dimensioni
cruciali
per
l'apprendimento



Teaching for Robust Understanding (Schoenfeld 2015, 2016)

Le cinque dimensioni di una lezione matematicamente «potente»	
La matematica	Come si sviluppano le idee matematiche nel corso dell'attività? E' possibile fare collegamenti significativi?
Il carico cognitivo	Gli studenti hanno la possibilità di dare senso alle idee matematiche? Di affrontare autentiche sfide? Possiamo aumentare queste opportunità?
Accesso equo ai contenuti	Chi non partecipa all'attività, e perché? Come possiamo aumentare la possibilità di partecipare in modo significativo per ogni studente?
Agency, ownership, identity	Quali opportunità hanno gli studenti di vedere se stessi e i compagni come «pensatori matematici»? Come possiamo aumentare queste opportunità?
Valutazione formativa	Che cosa sappiamo del processo di pensiero di ciascuno studente? Come possiamo tenerne conto?

Domande iniziali per iniziare a pianificare

- Quali sono le idee matematiche protagoniste?
- Le domande sollecitano spiegazioni o risposte?
Le domande danno senso all'idee matematiche?
- Come aumentare la partecipazione in modo significativo? E come coinvolgere in modo produttivo gli studenti?
- Quali opportunità hanno gli studenti per vedersi come pensatori matematici?
- Come possiamo tener conto del pensiero degli studenti?

Le schede finali:

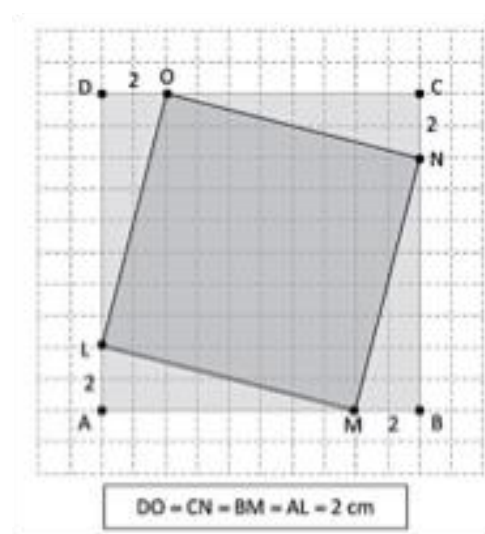
Alla lavagna il docente disegna...e propone il seguente

QUESITO:

In un quadrato ABCD di lato 10 cm si costruisce un quadrilatero LMNO in modo tale che i segmenti DO, CN, BM e AL sono uguali fra loro e ciascuno di essi misura 2 cm.

Chiede: Che tipo di quadrilatero è LMNO secondo voi?

Rilancia: Come possiamo essere sicuri che sia un quadrato?



Istituto Italo Calvino – Liceo Scientifico OSA

Studente: _____

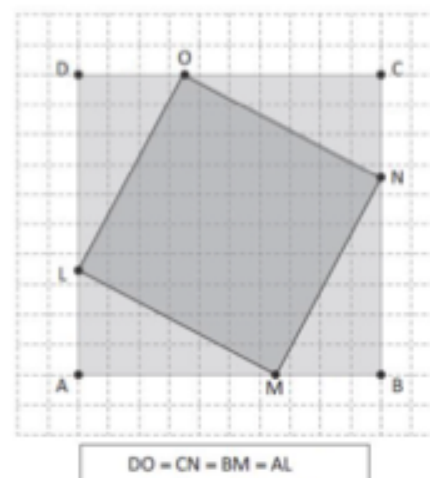
Classe: _____ Data: _____

QUESITO:

Immagina ora che i punti L, M, N e O si muovano lungo i lati del quadrato ABCD in modo tale che $DO = CN = BM = AL$.

Rifletti ed esplora sulle seguenti domande

1. Cosa succede alla figura LMNO se spostiamo il punto O ad una distanza di 1 cm da D? E se lo spostiamo di 3 cm?



QUESITO:

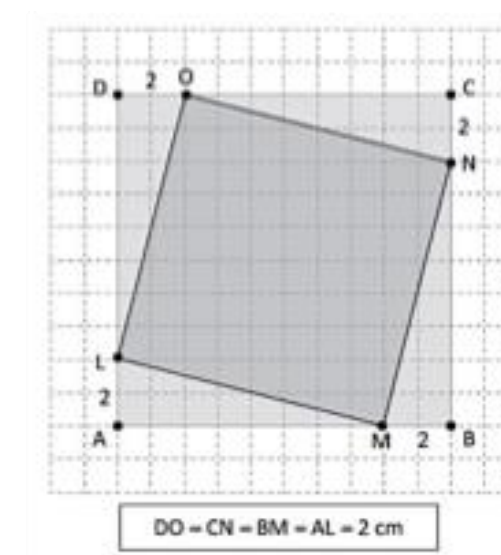
In un quadrato ABCD di lato 10 cm è inscritto un quadrato LMNO. I segmenti DO, CN, BM e AL sono uguali fra loro e ciascuno di essi misura 2 cm.

Quanto misura l'area del quadrato LMNO?

CONSEGNA (individuale):

Dopo aver letto il quesito, esplora il problema e cerca di rispondere alla domanda.

Al termine di questi 10 minuti avrai modo di confrontarti con i compagni del tuo gruppo, come spiegheresti la tua strategia risolutiva?



2. Come varia l'area di LMNO a seconda della posizione del punto O?

Momenti individuali e di gruppo

Ogni scheda aveva due diverse consegne:
una da svolgere individualmente e una da svolgere all'interno del piccolo gruppo

Individualmente



CONSEGNA (individuale):

Dopo aver letto il quesito, esplora il problema e cerca di rispondere alla domanda.

Al termine di questi 10 minuti avrai modo di confrontarti con i compagni del tuo gruppo, come spiegheresti la tua strategia risolutiva?

Suddivisi in gruppi omogenei
(3/4 persone)



CONSEGNA (gruppo):

Confrontate le idee e producite una risposta di gruppo che risulti ben argomentata, ossia corretta, chiara e completa.

Fasi dell'attività'



Questionario Individuale

1. Secondo te quali sono state le idee matematiche protagoniste delle lezioni? Quanto già sapevi , come ti è servito?
2. È possibile che l'area del quadrato LMNO superi 100 cm^2 ? Se sì, perché? Se no, perché?
3. Quale è il valore massimo e minimo dell'area del quadrato LMNO? Perché?
4. Per quanti valori della distanza di O da D l'area del quadrato LMNO può essere 40 cm^2 ? Perché?
5. Quali sono tutti e soli i valori della distanza tra O e D per cui l'area del quadrato LMNO è 58 cm^2 ?
6. Cosa ci ha permesso di dire l'algebra sull'area rispetto ai singoli casi?
7. **Quali sono stati i momenti in cui hai incontrato difficoltà? Come hai fatto a superarli?**
8. Come ti sei trovato/a a lavorare nel piccolo gruppo? Nomina gli aspetti positivi e negativi.
9. **All'interno del gruppo sei riuscito/a a presentare le tue idee? Le tue idee sono state prese in considerazione per costruire le risposte di gruppo? Come?**
10. **Facendo riferimento all'attività fatta in queste lezioni, scrivi una domanda su dubbi/perplessità chiarimenti che vorresti porre alla classe.**

*Mi sono trovato bene a lavorare in gruppo, **gruppo devo dire equilibrato**, nessuno si sentiva superiore agli altri e tutti potevano dire la propria opinione riguardo la tipologia di sistema che hanno utilizzato per muoversi all'interno del problema. (D.B. 2HT)*

*Lavorare in gruppo mi è stato utile, infatti, facendo ciò ho potuto **confrontarmi** e **formulare ipotesi**. Il lavoro mi è stato utile perché ho potuto **capire dove ho sbagliato** e **cosa dovevo migliorare**, però c'è anche da dire che riunendo più persone si riuniscono anche **diversi modi di pensare**. (A.D. 2HT)*

Come ti sei trovato/a a lavorare nel piccolo gruppo? Nomina gli aspetti positivi e negativi.

Cosa ci ha permesso di dire l'algebra sull'area rispetto ai singoli casi?

*L'algebra ci ha permesso di capire che il problema andava risolto con una semplice funzione; dal disegno della parabola, infatti, **potevamo dimostrare la variazione dell'area nel modo più chiaro possibile**. (M. B. 2BL)*

*Grazie all'algebra abbiamo trovato **un'equazione che risolve tutti i casi** senza dover ogni volta pensare a trovare la lunghezza di un lato e poi l'area. Infatti se il problema avesse posto O ad una distanza con un numero decimale da D non saremmo stati in grado di risolvere il problema. (D. V. 2BL)*

Spunti per una valutazione formativa

Dalla prima sperimentazione

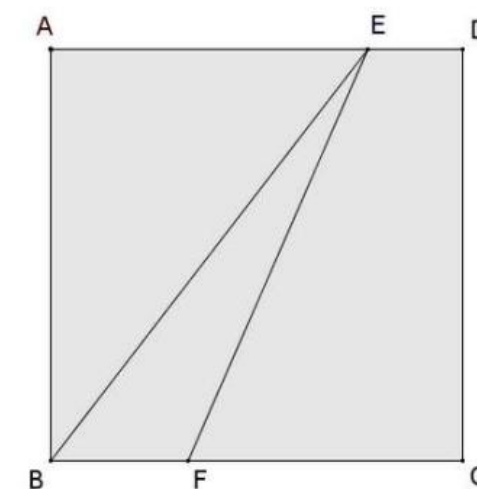
- Necessità di dare una valutazione formativa
- Fornire agli studenti una descrizione delle competenze raggiunte e/o da sviluppare e della loro partecipazione durante lo svolgimento delle attività.



Seconda parte dell'attività

Domanda

Il lato del quadrato $ABCD$ misura 6 cm . BF misura 2 cm .



Quanto misura la superficie del triangolo BFE ?

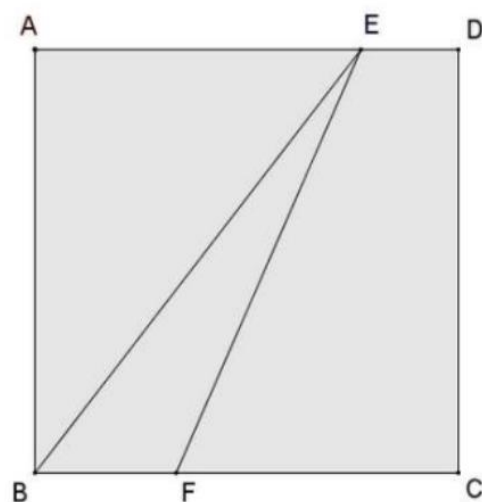
Digita il risultato.

Risultato: cm^2

Rielaborazione del quesito in ottica TRU

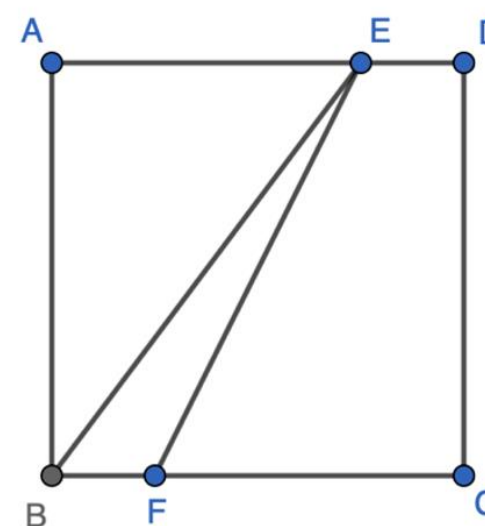
Nelle prime due schede si richiedeva di applicare i metodi e le strategie viste della prima parte.

1. Considera il quadrato ABCD di lato 6 cm. F è un punto sul lato BC tale che $BF=2$ cm. E è un punto sul lato AD. Al variare della posizione di E sul lato AD come cambia l'area della figura BFE?



Funzione costante

2. Considera il quadrato ABCD di lato 6 cm. F è un punto sul lato BC e E un punto sul lato AD tale che $ED=BF$. Al variare della posizione di F sul lato BC (e quindi di E su AD) come cambia l'area della figura BFE?

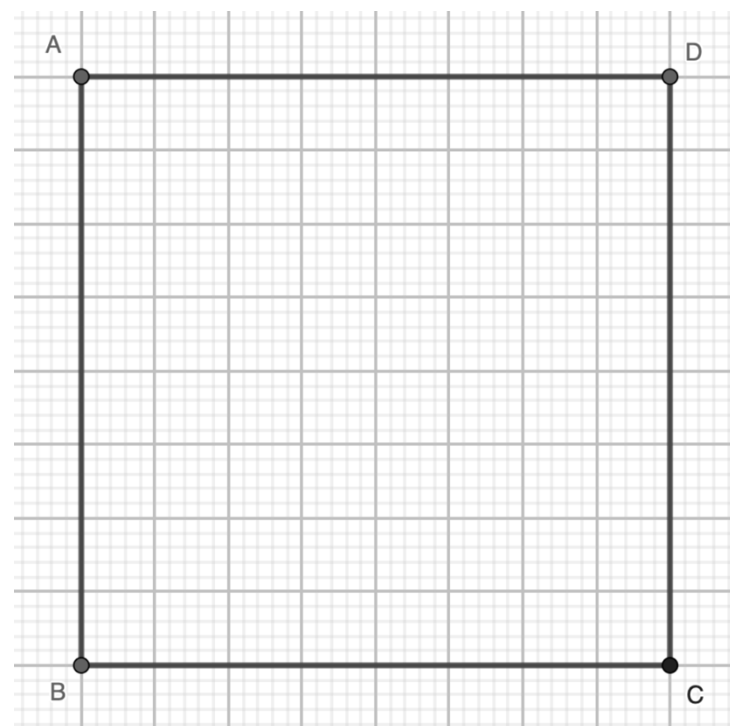


Funzione lineare

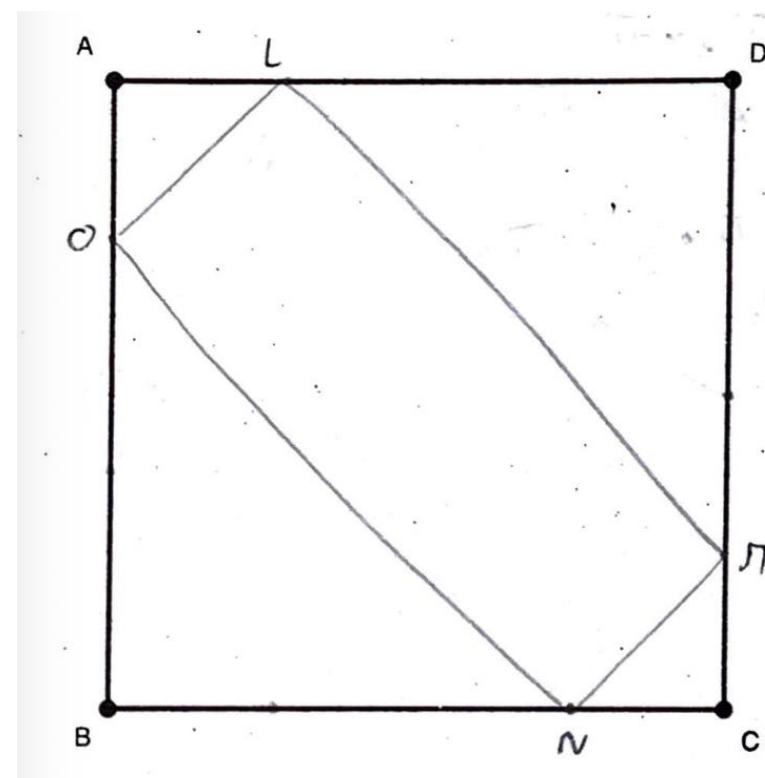
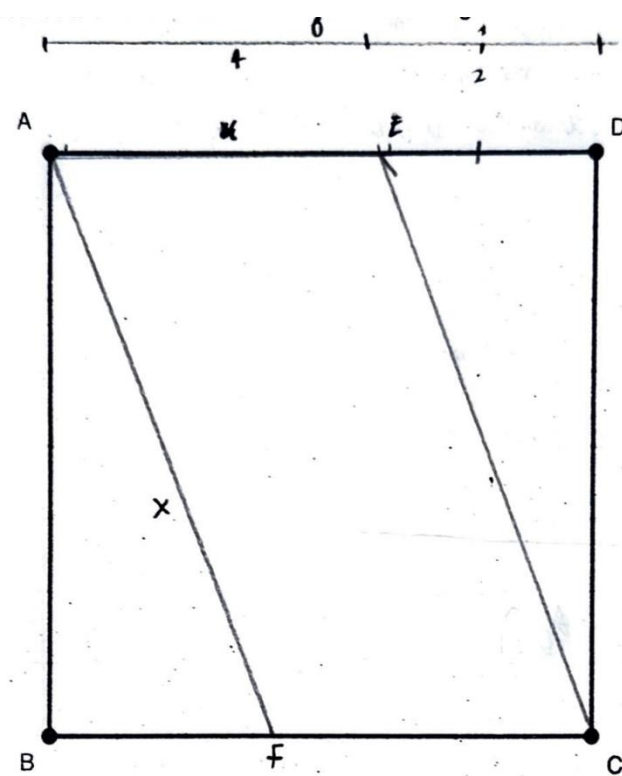
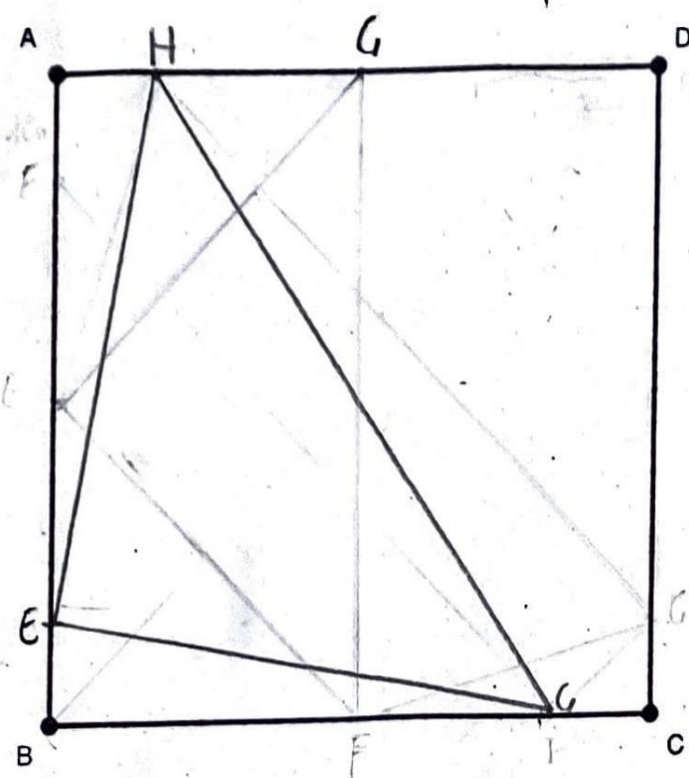
Rielaborazione del quesito in ottica TRU

Nell'ultima scheda si chiede di applicare le conoscenze sulla funzione quadratica in un contesto nuovo: ideare una figura geometrica inscritta nel quadrato, in modo che la sua area vari secondo una funzione di secondo grado.

3. Considera il quadrato ABCD di lato 6 cm. Prova ad inscrivere all'interno del quadrato una figura geometrica la cui funzione che descrive la sua area sia una funzione di secondo grado.



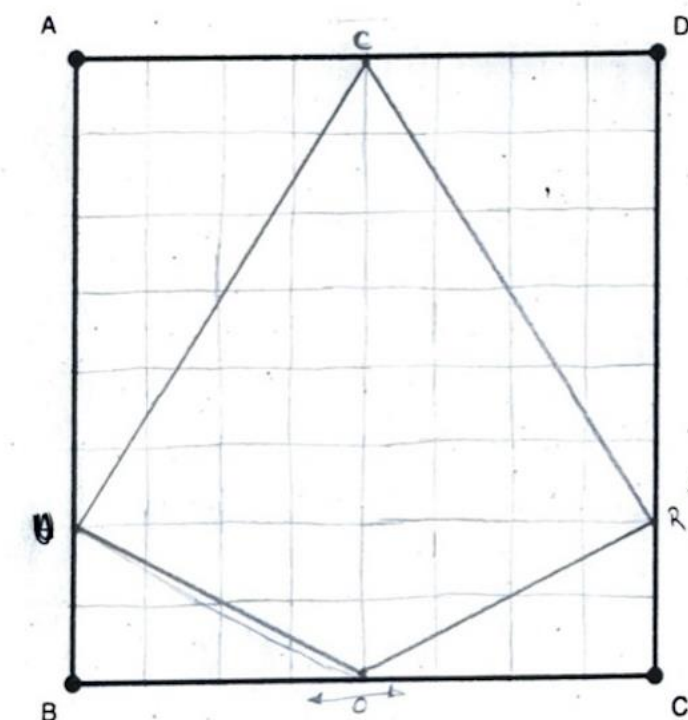
Dai protocolli degli studenti



$$AL = AO = \pi C = NC = x$$

$$OL = MN$$

$$ON = LM$$



La consegna

Dopo aver letto il quesito, esplora il problema e cerca di rispondere alla domanda.
Produci una soluzione che sia ben argomentata ossia chiara, corretta e completa. Avrai a disposizione 15 minuti.

Dopo aver risposto alla prime due domande ci sarà una discussione dopo la quale potrai riformulare la soluzione del quesito.

<i>Soluzione formulata prima della discussione</i>	<i>Soluzione formulata dopo la discussione</i>

Monitoraggio

L'attività è stata monitorata registrando tutte le discussioni (sia di classe che all'interno del gruppo) con l'aiuto di una tirocinante dell'Università di Genova.

Per ogni studente è stato prodotto una descrizione delle competenze raggiunte in tre ambiti:

1. **Partecipazione** alla discussione e al lavoro all'interno del piccolo gruppo
2. **Ascolto attivo** dei contributi dei compagni in modo da poter migliorare la propria soluzione
3. **Modellizzazione**: scelta corretta delle variabili e costruzione della funzione che descrive l'andamento delle grandezze in gioco



Esempio Descrizione Studente

Lo studente ha partecipato attivamente all'attività, come già accaduto nella prima fase , confermando quindi una consueta propensione a intervenire.
I suoi interventi introducono sempre nuovi spunti che aiutano a riflettere e ad approfondire il problema in questione. **(Partecipazione 2)**

Durante la discussione ha esposto la propria soluzione tramite confronto con quella di F

Ha infatti mostrato di aver ascoltato attentamente la discussione e in particolare la soluzione proposta da F

Ha evidenziato due aspetti della soluzione di F ha notato che lei ha analizzato un aspetto del problema non strettamente richiesto (dominio della variabile) ,ma che ha permesso di analizzare il problema in modo più completo. Inoltre ha osservato che F ha introdotto il calcolo di una grandezza matematica in maniera corretta, ma non utile alla risoluzione del problema. **(Ascolto attivo 1,3) (integrazione collaborativa)**

Esempio Descrizione Studente

In particolare ha dimostrato un'ottima capacità di astrazione e generalizzazione riconoscendo che l'espressione algebrica risultante (formula dell'area) resta invariata qualunque sia la posizione di E su AD.

Estratto di discussione (scheda 5):

G Io ho chiamato BF = base e l'altezza è AB , ho fatto lo stesso ragionamento di FAMA e visto che in nessuna di questi compariva il punto E ho notato che qualsiasi distanza avesse avuto E da D non sarebbe variato perché area del triangolo è base per altezza diviso due quindi non dipende dalla distanza di E..

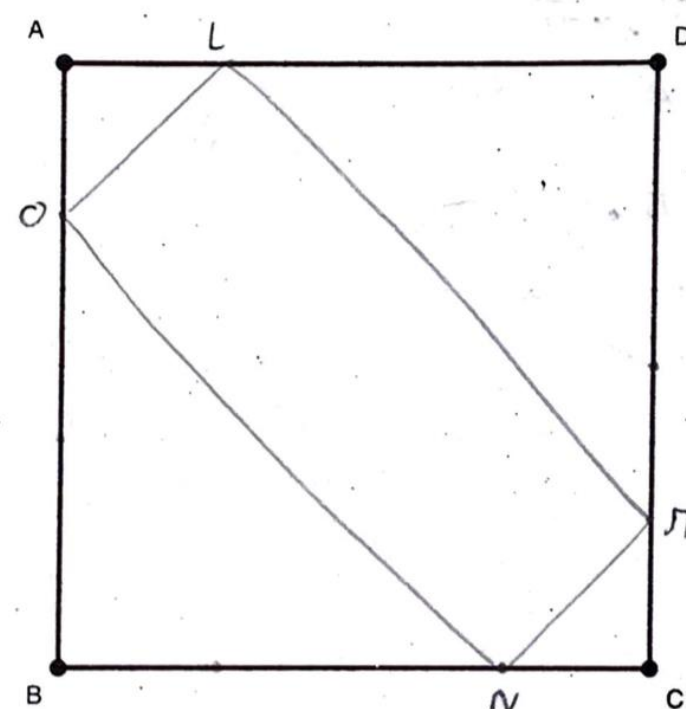
Nel suo protocollo è presente una soluzione con affermazioni corrette dal punto di vista matematico e ogni passaggio segue logicamente dal precedente. **(Correttezza strutturale 1,2,3)** La sua spiegazione è chiara nel senso che introduce prima una spiegazione a parole, poi traduce ciò che ha detto informalmente con un lessico matematico appropriato preciso e pertinente. **(chiarezza 1,2)**

Esempio Descrizione Studente

Nel suo protocollo dopo la discussione ha aggiunto il concetto di dominio della variabile introdotto da F e ha sottolineato a parole che l'espressione dell'area trovata è una funzione lineare come è emerso dalla sintesi della discussione comune. (Ascolto attivo 1,3)

Nel suo protocollo della terza scheda, la sua soluzione appare già prima della discussione completa e ben formalizzata con linguaggio matematico adeguato. Sceglie correttamente la variabile (modellizzazione 1), esprime algebricamente le altre grandezze geometriche in funzione di questa (modellizzazione 2) e l'area tramite una funzione di secondo grado (modellizzazione 3). Svolge anche i calcoli necessari per ottenere la rappresentazione canonica di una funzione di secondo grado (modellizzazione 4). Inserisce anche il dominio della variabile.

Esempio Descrizione Studente



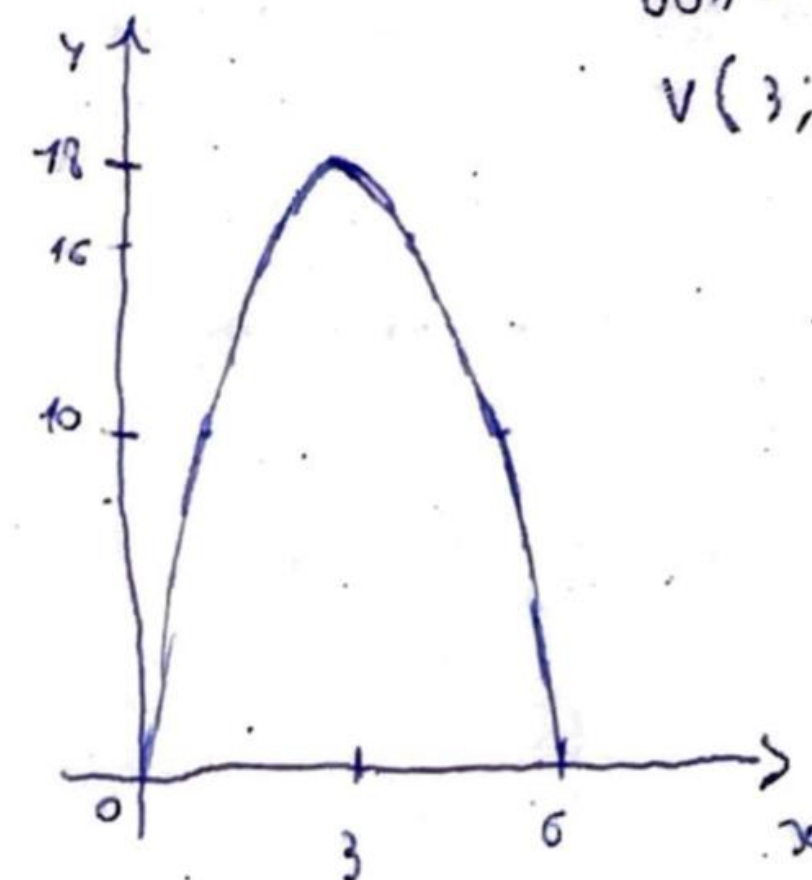
$$\begin{aligned} AL = AQ = PC = NC &= x \\ QL = PN \\ ON = LP \end{aligned}$$

Soluzione formulata prima della discussione

LA FIGURA È UN RETTANGOLO
CON I VERTICI L, P, N, Q POSIZIONATI
RISPETTIVAMENTE SU AD, DC, CB, AB
TALI CHE $AL = AQ = PC = NC = x$
 $0 \leq x \leq 6$
 $PN = QL = \sqrt{x^2 + x^2} = x\sqrt{2}$
 $ON = LP = \sqrt{2 \cdot (6-x)^2} = (6-x)\sqrt{2}$
 $A(x) = PN \cdot ON = x\sqrt{2} \cdot (6-x)\sqrt{2} =$
 $= -2x^2 + 12x$

$$\begin{aligned} A(x) &= -2x^2 + 12x = \\ &= -2(x-3)^2 + 18 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} Dom &= [0; 6] \\ V &= (3; 18) \end{aligned}$$



Dopo la discussione, arricchisce la sua soluzione disegnando un grafico che rappresenta la funzione. (Parabola). (modellizzazione 5)

Esempio Descrizione Studente

Durante la seconda discussione, interviene più volte per fornire contributi corretti e pertinenti per correggere le soluzioni di altri compagni sebbene diverse dalla sua. **(Partecipazione 1,2)**

Dal suo questionario si vede che inizialmente ha esposto le proprie idee solo quando veniva interpellato ma successivamente è intervenuto spontaneamente. **Partecipazione 3**

Inoltre ha riconosciuto che il confronto con i compagni è stato utile nonostante le sue soluzioni fossero già corrette. **(Ascolto attivo 3)**

Conclusioni e Domande



Progettare e sperimentare in classe un nuova attività strutturata secondo questa metodologia.



Praticare la peer observation tra docenti per migliorare la realizzazione e il monitoraggio delle attività didattiche co-progettate.



Continuare la collaborazione con il gruppo di ricerca DIVA al DIMA per la migliorare la nostra didattica.

**...Grazie per
l'attenzione**